Ⅰ 실수와 그 계산

새로 발견한 수를 나타내려면

고대 그리스의 수학자들은 정수와 유리수를 사용하여 자연 현상을 탐구하고 표현하려고 했습니다. 그러다가 피타고라스 정리를 알게 되면서 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 유리수가 아님을 알게 되었습니다. 즉, 실제로 존재하지만 그 값이 유리수가 아닌 수를 발견한 것입니다.

이 발견 이후에도 고대 그리스 수학자들은 한동안 이와 같은 수를 유리수로 어림하여 나타내기 위한 연구를 계속 하였습니다.

고대 그리스뿐만 아니라 중국과 인도 등에서도 유리수가 아닌 수인 원주율 π의 값을 정수로는 3, 소수로는 3.14, 분수로는 $\frac{22}{7}$ 또는 $\frac{355}{113}$ 등으로 나타내어 사용했습니다.

한편, 사진기의 조리갯값이나 음정의 진동수의 비도 유리수가 아님이 알려져 있습니다.

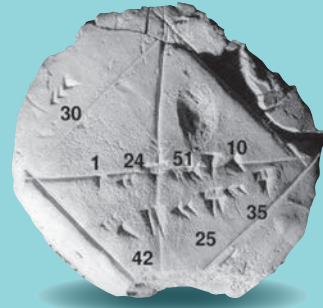
(출처: 샌더슨 스미스, 『수학사 가볍게 읽기』, 황선욱 역)

이 단원에서는

새로운 수인 무리수와 실수의 뜻을 알고, 근호를 포함한 식의 계산 방법을 배웁니다.

1 제곱근과 실수

자연수 1을 제곱하면 1이고, 2를 제곱하면 4입니다. 그러면 어떤 수를 제곱하면 2가 될까요? 옛날 사람들은 자연수와 분수만을 생각했기 때문에, 이와 같은 수를 분수로 나타내려고 애를 썼습니다.

고대 바빌로니아 사람들은 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 제곱하여 2가 되는 수와 같음을 알고 있었다고 합니다. 오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 약 8 cm인 원형으로 된 바빌로니아 점토판에서 이 수에 대한 기록을 찾을 수 있는데, 이 점토판은 기원전 1800~1600년경의 것으로 추측됩니다.

▲ 바빌로니아 점토판

이것을 우리가 사용하는 방법으로 나타내면

$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$과 같은데, 이를 소수로 나타내면 순환소수 $1.41421\dot{2}9\dot{6}$과 같습니다.

그런데 계산기를 사용하여 이 수를 제곱하면 1.999998⋯로 2와 거의 같지만 정확하게 2가 되지는 않음을 알 수 있습니다.

(출처: Katz, V. J., 『The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam』)

이 단원에서는 제곱근과 제곱근의 성질에 대하여 알아봅니다.

준비 학습

• 거듭제곱

1 다음을 계산하시오.

(1) 6^2 (2) $(-2)^2$ (3) 0.3^2 (4) $(-0.7)^2$

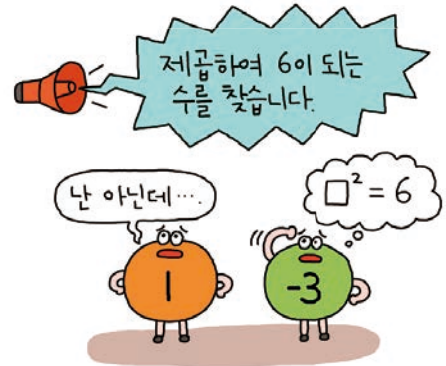
• 유리수

2 다음 수 중에서 정수가 아닌 유리수를 모두 찾으시오.

0.7, 0, $-\frac{9}{3}$, $0.\dot{5}$

01 제곱근

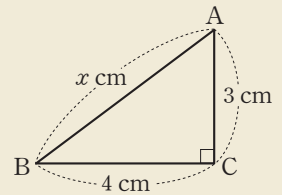
학습 목표 • 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

다가서기

제곱근이란 무엇인가?

생각 열기

오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=x$ cm라고 하자.

1. 피타고라스 정리를 이용하여 x^2의 값을 구해 보자.

2. x의 값이 될 수 있는 자연수를 말해 보자.

제곱하여 25가 되는 수를 x라고 하면

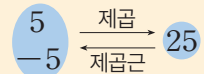
$$x^2=25$$

이다. 그런데 $5^2=25$, $(-5)^2=25$이므로 x는 5와 -5이다.

이와 같이 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉

$$x^2=a$$

일 때, x를 a의 **제곱근**이라고 한다.

이를테면 25의 제곱근은 5와 -5이다.

일반적으로 양수의 제곱근은 양수와 음수의 2개이며, 그 절댓값은 서로 같다. 또 제곱하여 0이 되는 수는 0뿐이므로 0의 제곱근은 0이다.

한편, 양수나 음수를 제곱하면 항상 양수가 되므로 음수의 제곱근은 생각하지 않는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

제곱근

❶ 양수의 제곱근은 양수와 음수의 2개이며, 그 절댓값은 서로 같다.
❷ 0의 제곱근은 0이다.

보기 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $\frac{1}{4}$의 제곱근은 $\frac{1}{2}$과 $-\frac{1}{2}$의 2개이며, $\left|\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|$이다.

문제 1 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 36 (2) 121 (3) $\frac{9}{25}$ (4) 0.09

양수 a의 제곱근 중에서 양수인 것을 양의 제곱근, 음수인 것을 음의 제곱근이라 하고, 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

▸ 0의 제곱근은 0이므로 $\sqrt{0}=0$이다.

양의 제곱근: $\sqrt{a}$, 음의 제곱근: $-\sqrt{a}$

▸ 근호 $\sqrt{\ }$는 뿌리(root)를 뜻하는 라틴어 radix의 첫 글자 r를 변형하여 만든 것이라고 한다.

이때 기호 $\sqrt{\ }$를 **근호**라 하며, $\sqrt{a}$를 '루트 a'라고 읽는다.
또 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 한꺼번에 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

문제 2 다음 수의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내시오.

(1) 7 (2) 13 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 0.2

25의 제곱근을 근호를 사용하여 나타내면 양의 제곱근은 $\sqrt{25}$이고, 음의 제곱근은 $-\sqrt{25}$이다. 그런데 25의 제곱근은 5와 -5이므로

$$\sqrt{25}=5, \quad -\sqrt{25}=-5$$

이다.
이와 같이 어떤 수의 제곱근은 근호를 사용하지 않고 나타낼 수도 있다.

문제 3 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내시오.

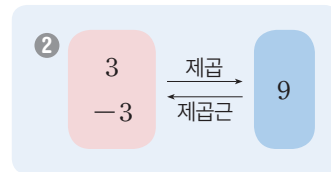
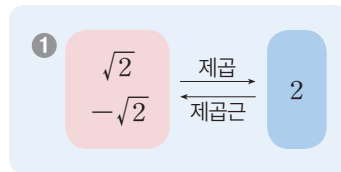
(1) $\sqrt{16}$　　(2) $-\sqrt{81}$

(3) $-\sqrt{\dfrac{25}{64}}$　　(4) $\sqrt{0.49}$

제곱근에는 어떤 성질이 있는가?

다음을 통하여 제곱근의 성질을 알아보자.

다음은 제곱과 제곱근 사이의 관계를 나타낸 것이다.

❶ $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ —제곱→ 2, 2 —제곱근→ $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

1 ❶을 이용하여 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

① $(\sqrt{2})^2=\square$　　② $(-\sqrt{2})^2=\square$

2 ❷를 이용하여 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

① $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=\square$　　② $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{\square}=\square$

위의 함께하기에서 2의 제곱근은 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$이므로

$$(\sqrt{2})^2=2,\quad (-\sqrt{2})^2=2$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 양수 a에 대하여 다음이 성립한다.

$$(\sqrt{a})^2=a,\quad (-\sqrt{a})^2=a$$

또 $3^2=9$, $(-3)^2=9$이므로

$$\sqrt{3^2}=3,\quad \sqrt{(-3)^2}=3$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 양수 a에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sqrt{a^2}=a,\quad \sqrt{(-a)^2}=a$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 성질

$a>0$일 때,

❶ $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$

❷ $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

보기 ① $(\sqrt{6})^2=6$, $(-\sqrt{6})^2=6$

② $\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{2}{7}$, $\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{2}{7}$

문제 4 다음 값을 구하시오.

(1) $(\sqrt{8})^2$

(2) $-(-\sqrt{14})^2$

(3) $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$

(4) $-\sqrt{2.6^2}$

예제 1 다음을 계산하시오.

(1) $(\sqrt{7})^2+\sqrt{(-2)^2}$

(2) $\sqrt{16}\times(-\sqrt{5})^2$

풀이 (1) $(\sqrt{7})^2=7$, $\sqrt{(-2)^2}=2$이므로

$(\sqrt{7})^2+\sqrt{(-2)^2}=7+2=9$

(2) $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$, $(-\sqrt{5})^2=5$이므로

$\sqrt{16}\times(-\sqrt{5})^2=4\times5=20$

답 (1) 9 (2) 20

문제 5 다음을 계산하시오.

(1) $(\sqrt{11})^2+(-\sqrt{6})^2$

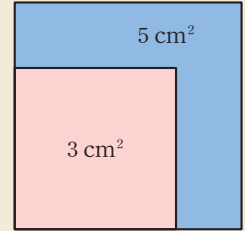
(2) $\sqrt{64}-(-\sqrt{17})^2$

(3) $\left(\sqrt{\frac{9}{8}}\right)^2\times\sqrt{\left(-\frac{16}{3}\right)^2}$

(4) $\sqrt{0.04}\div\sqrt{\frac{1}{100}}$

제곱근의 대소 관계는 어떻게 판단할 수 있는가?

오른쪽 그림은 넓이가 각각 $3\,\text{cm}^2$와 $5\,\text{cm}^2$인 정사각형 모양의 색종이 2장을 포개어 놓은 것이다.

1. 두 색종이의 한 변의 길이를 각각 구해 보자.
2. 1에서 구한 두 길이의 대소를 비교하고, 부등호를 사용하여 나타내 보자.

위의 생각 열기에서 넓이가 $3\,\text{cm}^2$인 색종이의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}\,\text{cm}$이고, 넓이가 $5\,\text{cm}^2$인 색종이의 한 변의 길이는 $\sqrt{5}\,\text{cm}$이다.

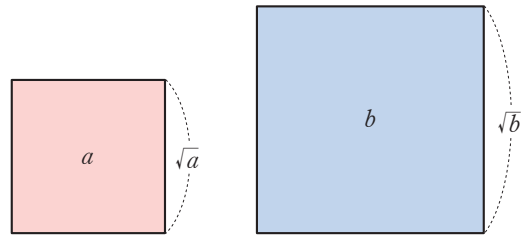
그런데 넓이가 넓은 색종이가 한 변의 길이도 더 길므로

$$3<5\text{에서} \qquad \sqrt{3}<\sqrt{5}$$

이다. 또 한 변의 길이가 긴 색종이가 넓이도 더 넓으므로

$$\sqrt{3}<\sqrt{5}\text{에서} \qquad 3<5$$

이다.

일반적으로 넓이가 a와 b인 두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{a}$와 $\sqrt{b}$이다.

이때 두 정사각형의 넓이와 길이 사이의 관계에 의하여

$$a<b\text{이면} \qquad \sqrt{a}<\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a}<\sqrt{b}\text{이면} \qquad a<b$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

제곱근의 대소 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

❶ $a<b$이면 $\qquad \sqrt{a}<\sqrt{b}$

❷ $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $\qquad a<b$

예제 2

다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) 3, $\sqrt{10}$　　　(2) $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{\frac{1}{3}}$

풀이 (1) 3을 근호를 사용하여 나타내면　$3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$

이때 $9<10$이므로　$\sqrt{9}<\sqrt{10}$

따라서　$3<\sqrt{10}$

(2) $\frac{1}{2}$을 근호를 사용하여 나타내면　$\frac{1}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$

이때 $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$이므로　$\sqrt{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{1}{3}}$, 즉　$-\sqrt{\frac{1}{4}}>-\sqrt{\frac{1}{3}}$

따라서　$-\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{1}{3}}$

답 (1) $3<\sqrt{10}$　(2) $-\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{1}{3}}$

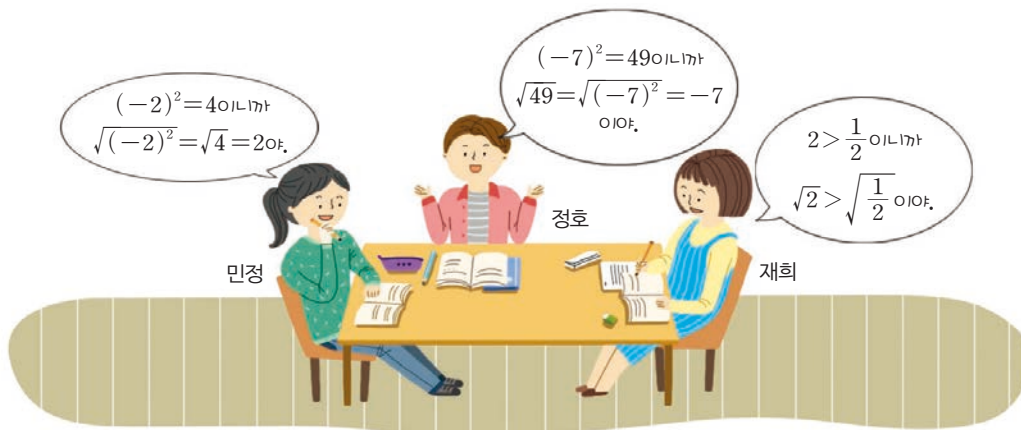
문제 6

다음 두 수의 대소를 비교하시오.

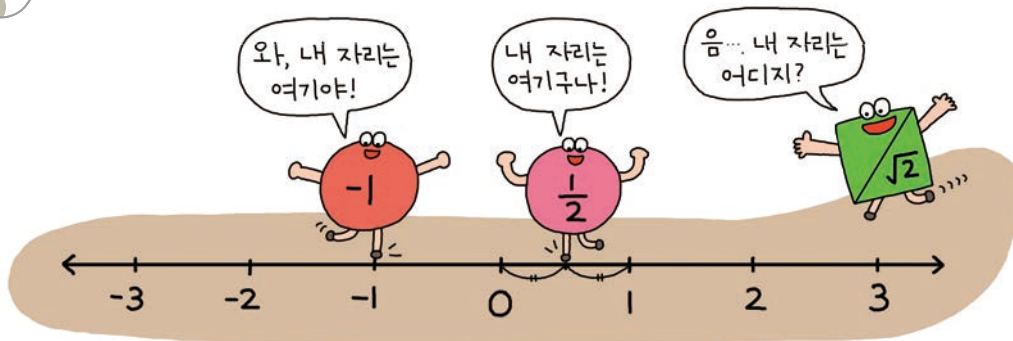
(1) $\sqrt{14}$, $\sqrt{20}$　　　(2) 4, $\sqrt{15}$

(3) $\frac{2}{5}$, $\sqrt{\frac{1}{5}}$　　　(4) $-\frac{3}{4}$, $-\sqrt{\frac{5}{8}}$

추론　태도 및 실천

다음은 민정, 정호, 재희가 제곱근의 성질에 대하여 설명한 것이다.

▶ 세 학생 중에서 잘못 말한 사람을 찾고, 그 내용을 바르게 고쳐 보자.

무리수와 실수

학습 목표 • 무리수의 개념을 이해하고, 실수의 대소 관계를 판단할 수 있다.

무리수란 무엇인가?

생각 열기 다음은 $\sqrt{2}$의 값을 알아보기 위하여 여러 가지 수를 제곱한 값을 나타낸 것이다.

x	x^2
1.3	1.69
1.4	1.96
1.5	2.25

x	x^2
1.41	1.9881
1.42	2.0164
1.43	2.0449

x	x^2
1.413	1.996569
1.414	1.999396
1.415	2.002225

1. $(\sqrt{2})^2=2$임을 이용하여 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어 보자.

$$1.414^2 \ \square \ (\sqrt{2})^2 \ \square \ 1.415^2$$

2. 1을 이용하여 세 수 1.414, $\sqrt{2}$, 1.415의 대소를 비교하고, 부등호를 사용하여 나타내 보자.

위의 생각 열기에서

$1.4^2<(\sqrt{2})^2<1.5^2$이므로 $1.4<\sqrt{2}<1.5$

$1.41^2<(\sqrt{2})^2<1.42^2$이므로 $1.41<\sqrt{2}<1.42$

$1.414^2<(\sqrt{2})^2<1.415^2$이므로 $1.414<\sqrt{2}<1.415$

이다. 이와 같은 방법으로 계속하면 $\sqrt{2}$의 값은

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168\cdots$$

과 같이 되며 순환소수가 아닌 무한소수임이 알려져 있다. 따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. 이와 같이 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수를 **무리수**라고 한다.

배웠어요!
정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

보기 다음 수는 모두 순환소수가 아닌 무한소수임이 알려져 있으므로 무리수이다.

① $\sqrt{3}=1.73205080756\cdots$, $\sqrt{3}-1=0.73205080756\cdots$

② $\pi=3.141592653589793\cdots$

한편, 근호를 사용하여 나타낸 수 중에서 $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$, $\sqrt{\frac{1}{25}}=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{1}{5}$과 같이 근호 안의 수가 유리수의 제곱인 수는 유리수이다. 그러나 $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$와 같이 근호 안의 수가 유리수의 제곱이 아닌 수는 무리수이다.

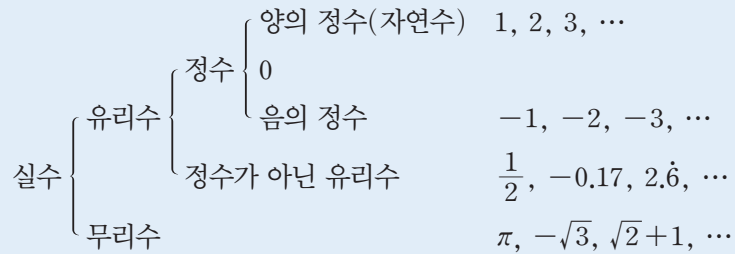
문제 1 다음 수 중에서 무리수를 모두 찾으시오.

$\sqrt{49}$, $-\sqrt{21}$, $\sqrt{(-3.14)^2}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{2}+3$

실수란 무엇인가?

유리수와 무리수를 통틀어 **실수**라 하며, 앞으로 수라고 하면 실수를 생각하기로 한다. 실수를 분류하면 다음과 같다.

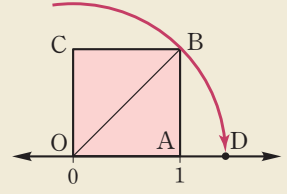
- 실수
  - 유리수
    - 정수
      - 양의 정수(자연수) $1, 2, 3, \cdots$
      - 0
      - 음의 정수 $-1, -2, -3, \cdots$
    - 정수가 아닌 유리수 $\frac{1}{2}$, -0.17, $2.\dot{6}$, $\cdots$
  - 무리수 π, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+1$, $\cdots$

▸실수 중에서 유리수가 아닌 수는 무리수이다.

문제 2 다음 표에 주어진 수를 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수 중에서 각각 해당하는 곳에 모두 ○표를 하시오.

	$-\pi$	5	$\sqrt{7}$	$1.\dot{4}$	$-\sqrt{16}$	$2+\sqrt{2}$
자연수						
정수						
유리수						
무리수						
실수						

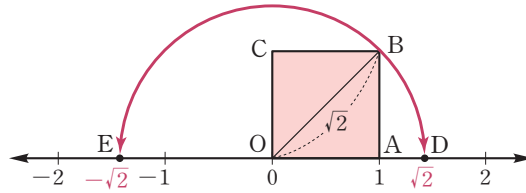
무리수를 수직선 위에 어떻게 나타내는가?

생각 열기

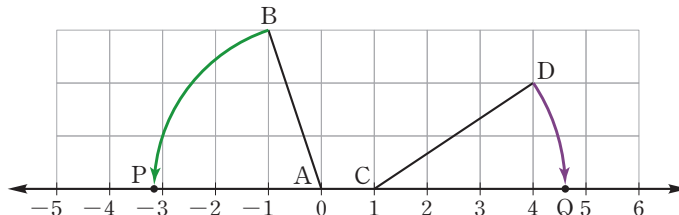
오른쪽 그림과 같이 수직선 위의 두 점 O(0), A(1)에 대하여 $\overline{OA}$를 한 변으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 점 O를 중심으로 하고 $\overline{OB}$를 반지름으로 하는 원이 원점의 오른쪽에서 수직선과 만나는 점을 D라고 하자.

1. 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{OB}$의 길이를 구해 보자.

2. 수직선에서 점 D가 나타내는 수를 말해 보자.

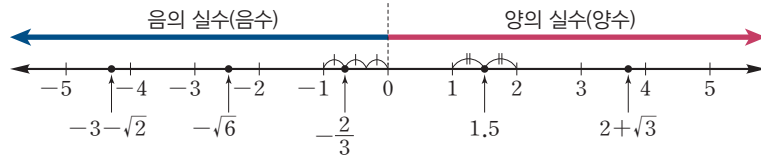
위의 생각 열기에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 OABC의 대각선 OB의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

따라서 다음 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 대각선 OB를 반지름으로 하는 원을 그릴 때, 원과 수직선이 만나는 두 점 D와 E는 각각 무리수 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$를 나타낸다.

이와 같이 유리수뿐만 아니라 무리수도 수직선 위에 나타낼 수 있다.

일반적으로 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수를 나타내는 점들 전체로 완전히 메울 수 있음이 알려져 있다.

문제 3 다음 그림은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이에 두 선분 AB와 CD를 그린 후, $\overline{AB}=\overline{AP}$, $\overline{CD}=\overline{CQ}$가 되도록 수직선 위에 두 점 P와 Q를 정한 것이다. 두 점 P와 Q가 나타내는 수를 각각 구하시오.

실수의 대소 관계는 어떻게 판단할 수 있는가?

▸ 양의 실수를 양수, 음의 실수를 음수라고 한다.

수직선에서 원점을 기준으로 오른쪽에 있는 수를 양의 실수, 왼쪽에 있는 수를 음의 실수라고 한다.

실수의 대소 관계는 유리수와 마찬가지로 수직선 위에서 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다. 따라서 양수는 음수보다 크다.

또 양수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 크고, 음수끼리는 절댓값이 큰 수가 더 작다.

일반적으로 두 실수 a와 b의 대소 관계는 $a-b$의 값의 부호에 따라 다음과 같이 판단할 수 있다.

▸ a와 b가 실수일 때, $a-b>0$, $a-b=0$, $a-b<0$ 중에서 반드시 하나만 성립한다.

실수의 대소 관계

a와 b가 실수일 때,

❶ $a-b>0$이면 $a>b$

❷ $a-b=0$이면 $a=b$

❸ $a-b<0$이면 $a<b$

예제 1

두 실수 3과 $1+\sqrt{5}$의 대소를 비교하시오.

풀이 $3-(1+\sqrt{5})=3-1-\sqrt{5}=2-\sqrt{5}$

$=\sqrt{4}-\sqrt{5}<0$

따라서 $3<1+\sqrt{5}$

답 $3<1+\sqrt{5}$

문제 4

다음 두 실수의 대소를 비교하시오.

(1) $4,\ 1+\sqrt{6}$

(2) $2,\ \sqrt{11}-1$

(3) $4-\sqrt{2},\ 2$

(4) $3+\sqrt{3},\ \sqrt{8}+\sqrt{3}$

제곱근표를 이용하여 제곱근의 값을 어떻게 구하는가?

제곱근표는 1.00에서 99.9까지의 수에 대한 양의 제곱근의 값을 반올림하여 소수점 아래 셋째 자리까지 나타낸 것이다.

다음 제곱근표에서 $\sqrt{6.87}$의 값은 표의 왼쪽의 수 6.8의 가로줄과 위쪽의 수 7의 세로줄이 만나는 곳의 수인 2.621이다.

▸ 이 책의 274~277쪽에 제곱근표가 실려 있다.

▸ 제곱근표에 있는 값은 대부분 제곱근을 어림한 값이지만 등호를 사용하여 $\sqrt{6.87}=2.621$과 같이 나타내기로 한다.

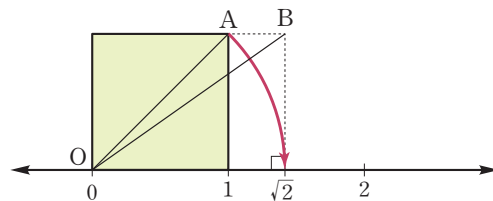
수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6.5	2.550	2.551	2.553	2.555	2.557	2.559	2.561	2.563	2.565	2.567
6.6	2.569	2.571	2.573	2.575	2.577	2.579	2.581	2.583	2.585	2.587
6.7	2.588	2.590	2.592	2.594	2.596	2.598	2.600	2.602	2.604	2.606
6.8	2.608	2.610	2.612	2.613	2.615	2.617	2.619	2.621	2.623	2.625
6.9	2.627	2.629	2.631	2.632	2.634	2.636	2.638	2.640	2.642	2.644
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

문제 5 제곱근표를 이용하여 다음 제곱근의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt{7.58}$ (2) $\sqrt{23.4}$ (3) $\sqrt{65}$

생각이 크는 수학

의사소통 정보 처리

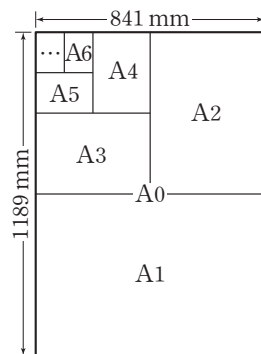
$\sqrt{2}$는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선 OA의 길이와 같으므로, 다음 그림과 같이 컴퍼스를 사용하여 원점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 그려 $\sqrt{2}$를 수직선 위에 나타낼 수 있다.

1 위의 그림에서 $\overline{OB}=\sqrt{3}$임을 설명하고, 컴퍼스를 사용하여 $\sqrt{3}$을 수직선 위에 나타내 보자.

2 같은 방법으로 $\sqrt{5}$와 $\sqrt{6}$을 각각 수직선 위에 나타내 보자.

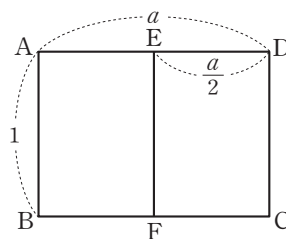
실생활에서 찾을 수 있는 무리수

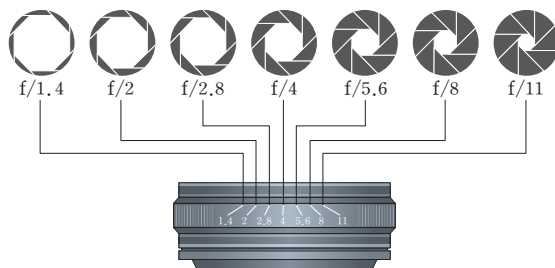
실생활에서 사용되는 무리수를 찾아보자.

복사 용지 중에서 가장 많이 사용하는 것은 A4 용지인데, 그 규격은 210 mm×297 mm이다. A4 용지는 가장 큰 A0 용지를 4번 잘라 만든 것으로, A0 용지를 오른쪽 그림과 같이 절반씩 1번, 2번, 3번, ⋯ 자른 것이 각각 A1, A2, A3, ⋯ 용지이다. 용지의 규격을 이렇게 정한 이유는 종이를 반으로 잘라도 가로와 세로의 길이의 비가 일정하게 유지되도록 하기 위해서이다.

A0부터 A5까지 용지의 두 변의 길이를 mm 단위로 나타내면 다음 표와 같다.

용지	A0	A1	A2	A3	A4	A5
짧은 변의 길이(mm)	841	594	420	297	210	148
긴 변의 길이(mm)	1189	841	594	420	297	210
$\frac{(\text{긴 변의 길이})}{(\text{짧은 변의 길이})}$						

탐구 1 위의 표에서 각각의 용지에 대하여 $\frac{(\text{긴 변의 길이})}{(\text{짧은 변의 길이})}$를 계산하여 이 값이 $\sqrt{2}=1.414\cdots$에 얼마나 가까운 수인지 확인해 보자.

탐구 2 오른쪽 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{AD}=a$일 때, □ABCD∽□DEFC가 되도록 하는 a의 값을 구해 보자.

탐구 3 사진기 렌즈의 테두리에 적혀 있는 조리갯값(F number)인 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8 등의 값이 무리수 $\sqrt{2}$와 어떤 관련이 있는지 조사해 보자.

스스로 확인하는 문제

1 제곱근

(1) **제곱근**

① 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉

$$x^2=a$$

일 때, x를 a의 제곱근이라고 한다.

② 양수 a의 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$와 같이 나타낸다.

(2) **제곱근의 성질**

$a>0$일 때,

① $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$

② $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

(3) **제곱근의 대소 관계**

$a>0$, $b>0$일 때,

① $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

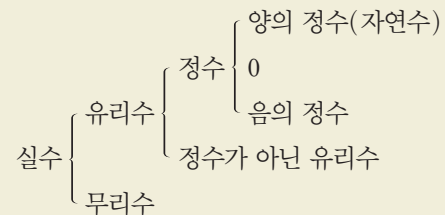
② $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

2 무리수와 실수

(1) **무리수**: 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수

(2) **실수**

① 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다.

② 실수를 분류하면 다음과 같다.

(3) **실수의 대소 관계**

a와 b가 실수일 때,

① $a-b>0$이면 $a>b$

② $a-b=0$이면 $a=b$

③ $a-b<0$이면 $a<b$

기본 문제

01 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 64　(2) 17　(3) $\frac{16}{81}$　(4) 1.21

02 다음 값을 구하시오.

(1) $(\sqrt{13})^2$　(2) $-\sqrt{(-21)^2}$

(3) $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2}$　(4) $-(-\sqrt{0.1})^2$

03 다음 수 중에서 무리수를 모두 찾으시오.

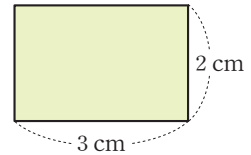
$0.\dot{4}\dot{1}$,　$\sqrt{\frac{1}{7}}$,　$-\pi$,　$-\sqrt{1.69}$,　$\sqrt{25}-2$

04 다음 □ 안에 > 또는 <를 써넣으시오.

(1) $4 \square \sqrt{19}$　　(2) $\sqrt{\frac{1}{3}} \square \frac{1}{3}$

(3) $2+\sqrt{6} \square 5$　　(4) $\sqrt{5}+\sqrt{8} \square \sqrt{8}+2$

05 $(-7)^2$의 양의 제곱근을 a, $\sqrt{16}$의 음의 제곱근을 b라고 할 때, ab의 값을 구하시오.

06 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 3 cm이고 세로의 길이가 2 cm인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오.

07 $\sqrt{48x}$가 자연수가 되기 위한 가장 작은 자연수 x를 구하시오.

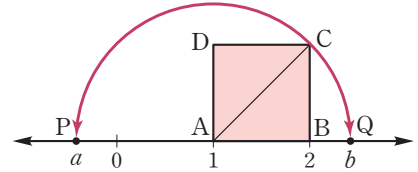
08 다음을 계산하시오.

(1) $(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2$　　(2) $\sqrt{36}-\sqrt{(-8)^2}$

(3) $\sqrt{2.25}\times\sqrt{(-10)^2}$　　(4) $\left(-\sqrt{\frac{14}{5}}\right)^2\div\sqrt{196}$

09 다음 수를 작은 것부터 차례대로 나열할 때, 네 번째 오는 수를 구하시오.

$$0, \quad -\sqrt{15}, \quad 4, \quad -3, \quad \sqrt{8}, \quad \sqrt{12}$$

10 오른쪽 그림과 같이 수직선 위의 두 점 A(1)과 B(2)에 대하여 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. $\overline{AC}=\overline{AP}=\overline{AQ}$인 두 점 P($a$)와 Q($b$)에 대하여 a와 b의 값을 각각 구하시오.

11 $1-\sqrt{13}$과 $1+\sqrt{5}$ 사이에 있는 정수를 모두 구하시오.

발전 문제

12 추론

자연수 x에 대하여 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 구하려고 한다. 예를 들어 $3<\sqrt{10}<4$이므로 $\sqrt{10}$ 이하의 자연수는 1, 2, 3의 3개이다.

(1) $\sqrt{17}$ 이하의 자연수의 개수를 구하시오.

(2) $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수가 4인 x의 개수를 구하시오.

13 $0<x<1$일 때, 다음 수를 큰 것부터 차례대로 나열하시오.

$$\sqrt{x}, \quad x, \quad x^2, \quad \frac{1}{x}$$

2 근호를 포함한 식의 계산

정수나 유리수를 배우고 나서 이들의 사칙계산의 원리를 탐구했듯이, 제곱근과 같은 무리수의 사칙계산의 원리도 잘 알고 있어야 나중에 여러 가지 실수의 계산을 효과적으로 할 수 있습니다.

예를 들어 $\sqrt{2}$를 2배한 값과 $\frac{1}{3}$배한 값을 더한 $2\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{2}$를 어떻게 계산할 수 있는지, $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$을 곱한 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$이 $\sqrt{6}$과 같은지 등을 확인하려면 근호를 포함한 식의 계산 원리를 알아야 합니다.

12세기 인도 최고의 수학자 바스카라(Bhaskara, A., 1114~1185(1193?))는

"… 무리수를 더하고 뺄 때 마치 정수처럼 셈한다."

라고 하면서, 정수에서 성립하는 성질을 이용하여 $\sqrt{3}+\sqrt{12}=3\sqrt{3}$을 계산했다고 합니다. 이를 통해 그 당시 인도 사람들이 수를 계산했던 방법이 지금 우리가 사용하는 방법과 매우 비슷했음을 추측할 수 있습니다.

(출처: 모리스 클라인, 『수학사상사 I』, 심재관 역)

이 단원에서는 근호를 포함한 식을 계산하는 여러 가지 방법에 대하여 알아봅니다.

준비 학습

• 유리수의 계산

1 다음을 계산하시오.

(1) $(-6)\times\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}$

(2) $\left(-\frac{5}{9}\right)\div\left(-\frac{4}{21}\right)\times\frac{2}{7}$

• 다항식의 덧셈과 뺄셈

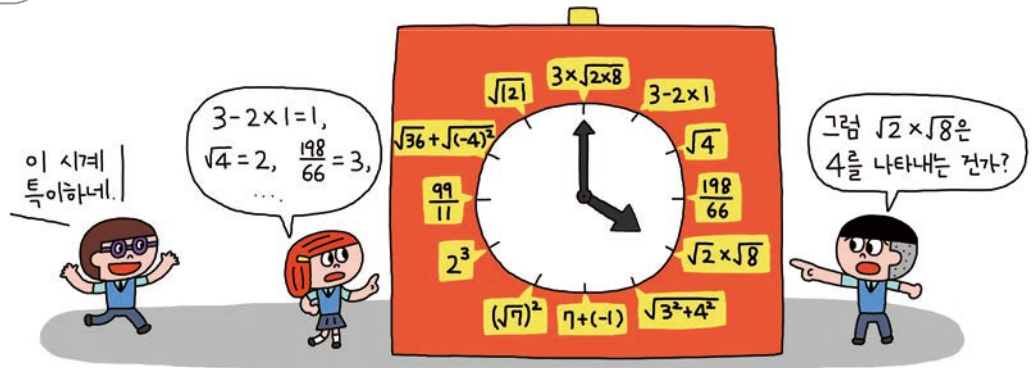
2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(2x-3)+(5x+2)$

(2) $4(2a-b)-3(a+2b)$

근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈

학습 목표 • 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.

다가서기

제곱근의 곱셈은 어떻게 하는가?

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}$와 $\sqrt{4\times9}$의 값을 비교하려고 한다.

1. 다음 □ 안에 알맞은 자연수를 써넣어 보자.

① $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=\square\times\square=\square$ ② $\sqrt{4\times9}=\sqrt{\square}=\square$

2. 1의 결과를 이용하여 $\sqrt{4}\times\sqrt{9}$와 $\sqrt{4\times9}$의 값을 비교해 보자.

배웠어요!

유리수의 곱셈에서 다음이 성립한다.
세 수 a, b, c에 대하여
• 교환법칙: $ab=ba$
• 결합법칙: $(ab)c=a(bc)$

유리수에서와 마찬가지로 실수에서도 곱셈의 교환법칙과 결합법칙이 성립한다. 이를 이용하여 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$과 $\sqrt{2\times3}$이 같은지 알아보자.

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$을 제곱하면

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2&=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\\&=(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\\&=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2\\&=2\times3\end{aligned}$$

이고, $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$이 양수이므로 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$은 2×3의 양의 제곱근이다.

그런데 2×3의 양의 제곱근은 $\sqrt{2\times3}$이므로

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$$

이다.

일반적으로 제곱근의 곱셈은 다음과 같이 한다.

▸ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$는 곱셈 기호 ×를 생략하고 $\sqrt{a}\sqrt{b}$와 같이 나타내기도 한다.

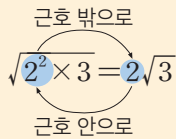
제곱근의 곱셈

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

보기 ① $\sqrt{3}\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{15}$

② $\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$

문제 1 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{5}\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{6}\sqrt{11}$ (3) $\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{\frac{3}{5}}$ (4) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}$

근호 안에 어떤 수의 제곱이 곱해져 있을 때, 그 수를 다음과 같이 근호 밖으로 꺼낼 수 있다.

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{2^2}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

또 근호 밖의 양수는 이를 제곱하여 다음과 같이 근호 안으로 넣을 수 있다.

$$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{12}$$

일반적으로 다음이 성립한다.

▸ $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때, 보통 근호 안의 수는 가장 작은 자연수가 되도록 한다.

$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

문제 2 다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{32}$ (2) $\sqrt{75}$ (3) $\sqrt{216}$ (4) $\sqrt{1000}$

문제 3 다음 수를 $\sqrt{a}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $3\sqrt{2}$ (2) $5\sqrt{5}$ (3) $2\sqrt{\frac{3}{4}}$ (4) $5\sqrt{\frac{2}{5}}$

제곱근의 나눗셈은 어떻게 하는가?

▸ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\div\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{3\div2}$

제곱근의 나눗셈 $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$는 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$과 같이 분수의 꼴로 나타낼 수 있다.

다음을 통하여 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$과 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 사이의 관계를 알아보자.

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$과 $\sqrt{\frac{3}{2}}$이 같은지 비교하려고 한다.

1 $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$의 값을 구해 보자.

2 $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$의 값을 구해 보자.

3 두 수 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$과 $\sqrt{\frac{3}{2}}$이 같은지 비교하고, 그 이유를 말해 보자.

위의 함께하기에서 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$과 $\sqrt{\frac{3}{2}}$은 모두 $\frac{3}{2}$의 양의 제곱근이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 제곱근의 나눗셈은 다음과 같이 한다.

제곱근의 나눗셈

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

보기 ① $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{24}{3}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{\frac{7}{25}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{7}}{5}$

문제 4 다음을 계산하시오.

(1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ (2) $\sqrt{\frac{5}{36}}$ (3) $\sqrt{30}\div\sqrt{5}$ (4) $\sqrt{14}\div\sqrt{56}$

분모의 유리화란 무엇인가?

다음에 답해 보자.

1. 무리수 $\sqrt{2}$에 어떤 수를 곱하면 유리수 2가 되는지 말해 보자.

2. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

① $\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{\square}{4}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\square}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\square}{2}$

위의 생각 열기에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 분모와 분자에 각각 $\sqrt{2}$를 곱하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

와 같이 분모를 유리수로 고칠 수 있다.

이와 같이 분모에 근호를 포함한 무리수가 있을 때, 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 각각 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 **분모의 유리화**라고 한다.

예제 1 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$

풀이 (1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

(2) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$

답 (1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{21}}{6}$

문제 5 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

(3) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$ (4) $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{10}}$

근호를 포함한 식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 경우에는 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 계산하면 편리하다.

예제 2 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{21} \div \sqrt{3} \times 2\sqrt{2}$　　(2) $\sqrt{2} \times \sqrt{18} \div \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

풀이 (1) $\sqrt{21} \div \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{2}$

$= \sqrt{7} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{14}$

(2) $\sqrt{2} \times \sqrt{18} \div \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

▸분모에 근호를 포함한 무리수가 있으면 분모를 유리화하여 나타낸다.

답 (1) $2\sqrt{14}$　(2) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

문제 6 다음을 계산하시오.

(1) $2\sqrt{7} \div \sqrt{2} \times \sqrt{6}$　　(2) $\sqrt{18} \times \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \div \sqrt{20}$

생각이 크는 수학

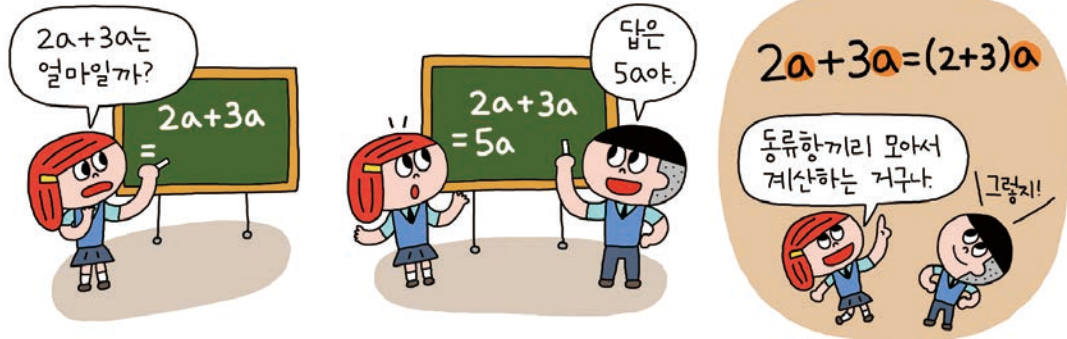
1보다 작거나 100보다 큰 양수의 제곱근의 값은 제곱근표에 나타나 있지 않지만, 제곱근의 성질과 제곱근표를 이용하면 그 값을 구할 수 있다.

1 제곱근표에서 $\sqrt{5.72}$의 값을 찾아보자.

2 **1**을 이용하여 $\sqrt{572}$의 값을 구하고, 그 방법을 설명해 보자.

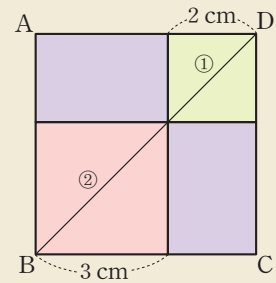
3 계산기에서 누름단추 [√] 를 이용하여 제곱근의 값을 구할 수 있다. 예를 들어 계산기에서 누름단추 [2] [√] 를 차례대로 누르면 $\sqrt{2}$의 값인 1.4142135…가 나타난다. 이와 같은 방법으로 $\sqrt{572}$의 값을 구하고, **2**의 결과와 비교해 보자.

근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈

학습 목표 • 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

제곱근의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 하는가?

오른쪽 그림은 색종이를 오려 붙여 정사각형 ABCD를 만든 것이다.

1. 두 정사각형 ①과 ②의 대각선의 길이를 각각 구해 보자.

2. 정사각형 ABCD의 대각선의 길이를 구해 보자.

위의 생각 열기에서 두 정사각형 ①과 ②의 대각선의 길이는 각각 $2\sqrt{2}$ cm와 $3\sqrt{2}$ cm이고, 정사각형 ABCD의 대각선의 길이는 $5\sqrt{2}$ cm이다. 이때 두 정사각형 ①과 ②의 대각선의 길이의 합이 정사각형 ABCD의 대각선의 길이와 같으므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

이것은 다음과 같이 $\sqrt{2}$를 하나의 문자로 생각하여 계산한 것과 같다.

$$2a+3a=(2+3)a=5a$$

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

유리수에서와 마찬가지로 실수에서도 덧셈의 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙이 성립한다. 따라서 제곱근의 덧셈과 뺄셈은 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 동류항끼리 모아서 계산한 것과 같이 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

생각 톡톡
$\sqrt{2}+\sqrt{2}$와 $\sqrt{2+2}$는 같을까?

보기
① $8\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(8-5)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

② $3\sqrt{2}+2\sqrt{7}+5\sqrt{2}-6\sqrt{7}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}+2\sqrt{7}-6\sqrt{7}$

$=(3+5)\sqrt{2}+(2-6)\sqrt{7}$

$=8\sqrt{2}-4\sqrt{7}$

문제 1 다음을 계산하시오.

(1) $3\sqrt{5}-10\sqrt{5}$

(2) $12\sqrt{10}+\sqrt{10}-7\sqrt{10}$

(3) $-2\sqrt{13}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+5\sqrt{13}$

(4) $5\sqrt{6}+2\sqrt{11}+3\sqrt{6}-8\sqrt{11}$

근호를 포함한 식의 계산에서 근호 안에 어떤 수의 제곱이 곱해져 있으면

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}\ (\text{단, } a>0,\ b>0)$$

임을 이용하여 계산한다.

예제 1 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{32}+\sqrt{8}$

(2) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-2\sqrt{20}$

풀이 (1) $\sqrt{32}+\sqrt{8}=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-2\sqrt{20}=\dfrac{10\sqrt{5}}{5}-4\sqrt{5}=2\sqrt{5}-4\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$

답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) $-2\sqrt{5}$

문제 2 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{75}+\sqrt{27}$

(2) $\sqrt{48}-\sqrt{12}$

(3) $\sqrt{7}-2\sqrt{28}+\sqrt{63}$

(4) $2\sqrt{\dfrac{3}{8}}+3\sqrt{24}-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

근호를 포함한 식의 혼합 계산은 어떻게 하는가?

근호를 포함한 식의 계산에서 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 경우에는 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산한다. 또 괄호가 있는 경우에는 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어서 계산한다.

예제 2 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{7}\div\sqrt{21}$ (2) $\sqrt{3}(\sqrt{15}+5\sqrt{2})$

풀이 (1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{7}\div\sqrt{21}=\sqrt{12}-\sqrt{7}\times\frac{1}{\sqrt{21}}=2\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sqrt{3}(\sqrt{15}+5\sqrt{2})=\sqrt{3}\times\sqrt{15}+\sqrt{3}\times5\sqrt{2}$

$=\sqrt{45}+5\sqrt{6}=3\sqrt{5}+5\sqrt{6}$

답 (1) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (2) $3\sqrt{5}+5\sqrt{6}$

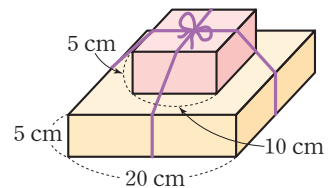
문제 3 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{28}\div2+\sqrt{7}\times3$ (2) $\sqrt{50}-2\sqrt{5}\div\sqrt{40}$

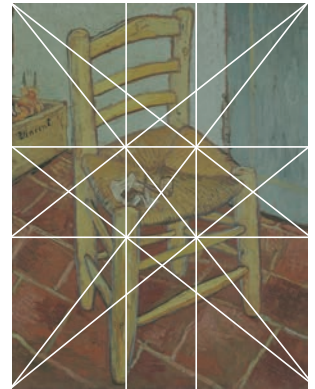
(3) $3\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})$ (4) $(\sqrt{54}-\sqrt{18})\div\sqrt{3}$

생각이 크는 수학

오른쪽 그림과 같이 밑면의 한 변의 길이가 각각 10 cm, 20 cm인 정사각형이고, 높이는 모두 5 cm인 직육면체 모양의 두 상자가 있다. 작은 상자는 큰 상자의 가운데에 올려놓고 그림처럼 묶어 매듭을 매려고 한다.

▶ 매듭을 매는 데 필요한 끈의 길이가 10 cm일 때, 필요한 끈의 전체 길이를 구해 보자.

제곱근을 이용한 화면 분할

사진을 찍거나 그림을 그릴 때 화면을 분할하여 대상의 구도를 잡는 것이 매우 중요한데, 이때 직사각형에 여러 가지 선을 그어 무늬를 만들어 화면을 분할한다고 한다. 이와 같은 무늬는 캐나다 태생의 미국 화가인 함비지(Hambidge, J., 1867~1924)가 처음 도입했는데, 그는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$와 같이 자연수의 제곱근을 길이로 갖는 직사각형을 기본으로 했다. 이와 같은 화면 분할에서 선분의 길이나 영역의 넓이와 이들 사이의 비를 구하는 데 무리수의 사칙계산이 필요하다.

(출처: Hambidge, J., 『Dynamic Symmetry: The Greek Vase』)

▲ 반 고흐(van Gogh, V., 1853~1890)가 그린 「고흐의 의자」의 화면 분할

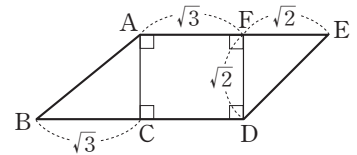
오른쪽 그림과 같은 무늬의 일부분에서 사다리꼴 ABDF와 직사각형 ACDF의 넓이는 각각 다음과 같다.

$$(\text{사다리꼴 ABDF의 넓이})=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}+\sqrt{3})\times\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$(\text{직사각형 ACDF의 넓이})=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$$

이때 $\frac{3\sqrt{6}}{2}\div\sqrt{6}=\frac{3}{2}$이므로, 사다리꼴 ABDF는 직사각형 ACDF보다 1.5배 넓음을 알 수 있다. 또 $\overline{AB}$와 $\overline{DE}$의 길이를 각각 구하면 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$$

$$\overline{DE}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$$

탐구 1 사다리꼴 ACDE의 넓이를 구하고, 이것이 직사각형 ACDF의 넓이의 몇 배인지 알아보자.

탐구 2 사각형 ABDE의 넓이를 구하고, 이것이 직사각형 ACDF의 넓이의 몇 배인지 알아보자.

탐구 3 $\overline{BF}$의 길이를 구해 보자.

스스로 확인하는 문제

1 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈

(1) **제곱근의 곱셈**

$a>0$, $b>0$일 때,

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

(2) **제곱근의 나눗셈**

$a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(3) **분모의 유리화**

분모에 근호를 포함한 무리수가 있을 때, 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것

2 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈

(1) **제곱근의 덧셈과 뺄셈**

① 제곱근의 덧셈과 뺄셈은 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

② 근호 안에 어떤 수의 제곱이 곱해져 있으면 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ (단, $a>0$, $b>0$)임을 이용하여 계산한다.

(2) **근호를 포함한 식의 혼합 계산**

① 근호를 포함한 식의 계산에서 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 경우에는 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산한다.

② 괄호가 있는 경우에는 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어서 계산한다.

기본 문제

01 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{3}\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{\dfrac{14}{3}}\sqrt{\dfrac{6}{7}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$

(4) $\sqrt{40}\div\sqrt{8}$

02 다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{28}$

(2) $\sqrt{72}$

(3) $-\sqrt{60}$

(4) $-\sqrt{63}$

03 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{15}}{5\sqrt{6}}$

04 다음을 계산하시오.

(1) $5\sqrt{6}+2\sqrt{6}$ (2) $3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

(3) $2\sqrt{7}-4\sqrt{10}+3\sqrt{7}+\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{75}+\sqrt{12}-\sqrt{80}$

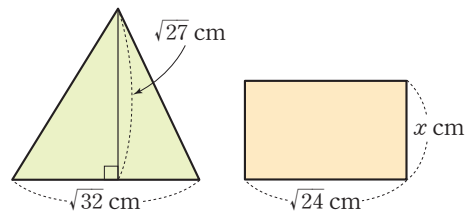
05 $\sqrt{48}=a\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}=\sqrt{b}$일 때, $b-a$의 값을 구하시오.

06 $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}$일 때, $\sqrt{225}=a^{\square}b^{\square}$이다. □ 안에 알맞은 수를 구하시오.

07 다음을 계산하시오.

(1) $5\sqrt{2}\times\sqrt{6}$ (2) $7\sqrt{15}\div(-\sqrt{3})$

(3) $4\sqrt{2}\times2\sqrt{3}\div\sqrt{12}$ (4) $-2\sqrt{12}\div\sqrt{24}\times3\sqrt{3}$

08 오른쪽 그림에서 삼각형과 직사각형의 넓이가 같을때, x의 값을 구하시오.

09 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{10})$

(2) $\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{6})-\sqrt{2}$

(3) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{6}$

(4) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

10 $a=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{2}-3\sqrt{3}$일 때, $\sqrt{3}a-\sqrt{2}b$를 계산하시오.

11 $\sqrt{75}+\frac{3}{\sqrt{3}}+\sqrt{6}\times\sqrt{2}=k\sqrt{3}$을 만족시키는 k의 값을 구하시오.

발전 문제

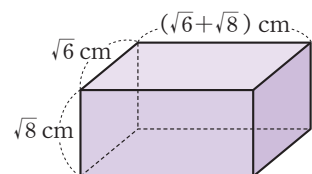
12 $\sqrt{32}-2\sqrt{24}-\sqrt{2}\left(2+\frac{6}{\sqrt{12}}\right)=a\sqrt{2}+b\sqrt{6}$이 성립할 때, $a-b$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 유리수이다.)

13 문제 해결

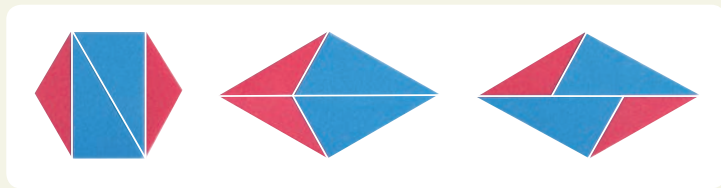
오른쪽 그림과 같이 세 모서리의 길이가 각각 $(\sqrt{6}+\sqrt{8})$ cm, $\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{8}$ cm인 직육면체가 있다.

(1) 이 직육면체의 부피를 구하시오.

(2) 이 직육면체의 겉넓이를 구하시오.

분할 퍼즐을 이용한 제곱근의 계산

하나 이상의 도형을 여러 조각으로 잘라 낸 다음에 이들을 재배열하여 새로운 도형을 만드는 것을 '분할 퍼즐(dissection puzzle)'이라고 하는데, 아주 오래전부터 전 세계적으로 다양한 종류의 분할 퍼즐이 재미있는 놀이 도구로 사용되고 있다.

활동지 283쪽

[그림 1]은 정육각형의 대각선을 따라 직각삼각형 두 조각과 이등변삼각형 두 조각으로 자른 것이다. 이 네 조각을 재배열하면 [그림 2]와 같이 새로운 정육각형과 마름모를 각각 만들 수 있다.

[그림 1] [그림 2]

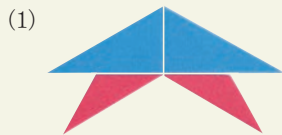
1 [그림 1]의 정육각형의 한 변의 길이를 1이라고 할 때, 피타고라스 정리를 이용하여 다음을 각각 구해 보자.

(1) 직각삼각형 한 조각의 세 변의 길이

(2) 이등변삼각형 한 조각의 세 변의 길이

2 위의 **1** 의 결과를 이용하여 다음 각 도형의 둘레의 길이를 구해 보자.

(1)

(2)

3 네 조각을 재배열하여 둘레의 길이가 $6+2\sqrt{3}$인 도형을 만들어 보자.

단원을 마무리하는 문제

01 다음 중에서 옳은 것은?

① -3은 -9의 음의 제곱근이다.
② 양수 a의 제곱근은 $\sqrt{a}$이다.
③ $\sqrt{16}=\pm4$이다.
④ 모든 수의 제곱근은 2개이다.
⑤ 10은 100의 양의 제곱근이다.

02 12의 양의 제곱근을 a, 음의 제곱근을 b라고 할 때, ab의 값을 구하시오.

03 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2=\frac{9}{16}$

ㄴ. $(-\sqrt{19})^2=19$

ㄷ. $\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{1}{5}$

ㄹ. $-\sqrt{(-0.3)^2}=-0.3$

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

04 $\sqrt{144}-(-\sqrt{5})^2+\sqrt{(-6)^2}-(\sqrt{10})^2$을 계산하시오.

05 다음 중에서 옳은 것은?

① $\sqrt{26}>6$　② $\sqrt{5}<2$
③ $-\sqrt{21}>-4$　④ $-\sqrt{12}<-3$
⑤ $\frac{\sqrt{2}}{5}>\frac{\sqrt{3}}{5}$

06 다음 중에서 무리수인 것은?

① $\sqrt{49}$　② $\sqrt{(-3)^2}$　③ $\sqrt{3.6}$
④ $0.\dot{7}$　⑤ $\sqrt{\frac{25}{36}}$

07 다음 중에서 옳은 것은?

① 유리수는 유한소수로 나타낼 수 있다.
② 무한소수는 무리수이다.
③ 순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.
④ 근호를 사용하여 나타낸 수는 모두 무리수이다.
⑤ 0은 유리수도 무리수도 아니다.

08 $3<\sqrt{a}<4$를 만족시키는 자연수 a의 값을 모두 구하시오.

09 세 수 $A=5\sqrt{2}-1$, $B=5+\sqrt{2}$, $C=6-\sqrt{2}$에 대하여 다음 중에서 옳은 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$
③ $B<A<C$ ④ $C<A<B$
⑤ $C<B<A$

10 $\sqrt{12}\times\sqrt{15}\times\sqrt{35}=a\sqrt{7}$일 때, a의 값을 구하시오.

11 $\sqrt{18}\div\sqrt{6}\times3\sqrt{3}$을 계산하면?

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

12 $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$의 분모를 유리화하면?

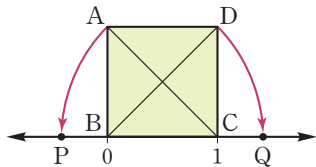
① $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5}$
③ $\dfrac{5-\sqrt{2}}{5}$ ④ $\dfrac{5-\sqrt{10}}{5}$
⑤ $\sqrt{5}+\sqrt{2}$

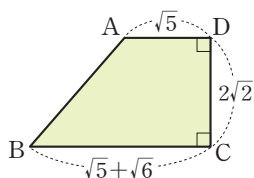
13 $\dfrac{5}{\sqrt{45}}=a\sqrt{5}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=b\sqrt{3}$일 때, $a+b$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

14 $\sqrt{3}(\sqrt{5}+4)-\sqrt{5}(\sqrt{15}-2\sqrt{3})$을 계산하면?

① $-3\sqrt{15}-\sqrt{3}$ ② $-3\sqrt{15}+\sqrt{3}$
③ $\sqrt{15}-3\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{15}+3\sqrt{3}$
⑤ $3\sqrt{15}-\sqrt{3}$

15 다음 그림과 같이 수직선 위의 두 점 B(0)과 C(1)에 대하여 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 수직선 위에 $\overline{CA}=\overline{CP}$, $\overline{BD}=\overline{BQ}$인 두 점 P와 Q를 각각 잡을 때, $\overline{PQ}$의 길이는?

① $2\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}+1$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{2}+2$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

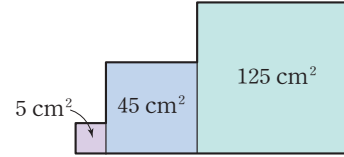
16 오른쪽 그림과 같은 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하시오.

17 $\sqrt{24}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\sqrt{6}\right)-\frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{32}-2)$가 유리수일 때, 유리수 a의 값을 구하시오.

[18~21] 서술형 풀이 과정과 답을 써 보자.

18 $\sqrt{\frac{240}{x}}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x의 값을 구하시오.

19 $xy<0$, $x<y$일 때,
$\sqrt{x^2}-\sqrt{(-2x)^2}+(-\sqrt{y})^2$
을 간단히 하시오.

20 $\sqrt{6000}$은 $\sqrt{60}$의 A배이고 $\frac{\sqrt{0.6}}{\sqrt{60}}=B$일 때, AB의 값을 구하시오.

21 다음 그림과 같이 넓이가 각각 5 cm^2, 45 cm^2, 125 cm^2인 세 정사각형을 이어 붙여서 새로운 도형을 만들었다. 이 도형의 둘레의 길이를 구하시오.

자기 평가 정답을 맞힌 문항에 ○표를 하고 결과를 점검한 다음, 이 단원의 학습 목표를 얼마나 성취했는지 스스로 평가하고, 학습 보충 계획을 세워 보자.

문항 번호	학습 목표	성취도
01 02 03 04 18 19	제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하였는가?	☺ 😐 ☹
05 06 07 08 09	무리수와 실수의 개념을 이해하고, 실수의 대소 관계를 판단할 수 있는가?	☺ 😐 ☹
10 11 12 13 14 15 16 17 20 21	근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있는가?	☺ 😐 ☹

0개~12개 개념 학습이 필요해요! / 13개~15개 부족한 부분을 검토해 봅시다! / 16개~18개 실수를 줄여 봅시다! / 19개~21개 훌륭합니다!

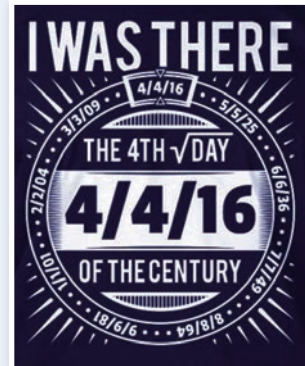
● 학습 보충 계획: ....

제곱근을 기념하는 날

2월 14일인 '밸런타인데이'나 3월 14일인 '파이(π)데이'는 매년 특정한 날에 특별한 의미를 붙여서 기념하는 날인데, 더 나아가 특정한 해의 특정한 날에 특별한 의미를 붙여서 기념하는 경우도 있다.

'제곱근의 날(Square Root Day)'도 이 중의 하나인데, 연도의 마지막 두 자리 수의 양의 제곱근이 월, 일과 일치하는 날이 바로 '제곱근의 날'이다.

이를테면 2016년의 마지막 두 자리 수는 16이고 $\sqrt{16}=4$이므로, 2016년 4월 4일이 '제곱근의 날'이 된다.

또 한 세기에 '제곱근의 날'은 아래와 같이 9번 나타나는데, 2016년 다음의 '제곱근의 날'은 2025년 5월 5일이며, 21세기의 마지막 '제곱근의 날'은 2081년 9월 9일이다.

○○01년 1월 1일	○○04년 2월 2일	○○09년 3월 3일
○○16년 4월 4일	○○25년 5월 5일	○○36년 6월 6일
○○49년 7월 7일	○○64년 8월 8일	○○81년 9월 9일

우리나라에는 거의 알려져 있지 않은 '제곱근의 날'은 미국의 어느 고등학교 수학 교사가 1981년 9월 9일에 처음 이날을 기념하면서 시작되었고, 그의 딸이 사회관계망 서비스를 통하여 이날을 소개하면서 미국 전역으로 확산되었으며 다른 나라에도 전파되고 있다고 한다.

사람들은 무나 당근과 같은 뿌리(root) 채소를 정사각형(square) 모양으로 썰어서 먹으며 이날을 기념하고 즐긴다고 한다. 우리나라에서는 깍두기를 먹으며 이날을 기념하면 재미있을 것 같다.

정확한 일기 예보를 위해 어떤 계산이 필요할까요?

기상학자는 날씨를 예보하고 이와 관련된 과정들을 설명하는 데 도움을 줄 수 있는 여러 가지 대기 운동과 대기 현상을 연구하는 대기 과학의 전문가를 말합니다. 기상 관측 장비와 컴퓨터 성능의 발전에 힘입어 이전보다 일기 예보의 정확도가 훨씬 높아졌는데, 여기에는 기상 관측 자료의 분석에 필요한 여러 가지 계산을 해 주는 수학의 힘도 크게 작용합니다.

일기 예보는 어느 특정한 지역의 기온, 기압, 습도, 풍향, 풍속 등의 기상 상태를 동시에 관측한 다음 이 자료를 한데 모아 분석한 결과를 발표하는 것입니다.

일기 예보를 위해 관측한 자료를 수집하여 기상학, 물리학, 통계학 등의 지식을 사용하여 분석할 때 많은 양의 복잡한 계산을 하게 되는데, 여러 가지 계산에서 제곱근과 같은 무리수를 다루게 됩니다.

항공기나 선박 등을 운항할 때 안전을 위해 최대한 멀리 볼 수 있는 거리를 확보해야 하는데, 이를 시정 거리(視程距離, visibility)라고 합니다. 맑은 날 지면 또는 수면으로부터 높이가 h m인 지점에서 최대한 멀리 바라볼 수 있는 시정 거리는 $\sqrt{12.8h}$ km로 계산하기도 합니다.

예를 들어 높이가 1058 m인 속리산 정상 부근에서는 최대 116 km 정도 떨어진 지점까지 볼 수 있어서, 맑은 날 맨눈으로 서울은 볼 수 없지만 대구는 볼 수 있습니다.

최근 일본과 인도네시아 등의 환태평양 화산대에 속한 지역에서 자주 일어나서 큰 피해를 끼치는 지진 해일(地震海溢, tsunami)을 예측하는 것은 태풍의 발생과 진행 경로를 예측하는 것과 마찬가지로 매우 어려운 일입니다. 기상학자들은 지진 해일이 발생하는 경우에 그 속도를 계산하여 해안가에 도달하는 시간을 예측하는데, 지진 발생 지역의 수심이 h m일 때 지진 해일의 속도는 초속 $\sqrt{9.8h}$ m로 계산한다고 합니다.

예를 들어 평균 수심이 100 m 정도인 우리나라 남해에서 지진이 발생할 때 일어나는 지진 해일의 속도는 초속 31.3 m 정도가 되는데, 이것은 시속 113 km 정도의 빠르기입니다.

(출처: 한국지구과학회, 『지구과학사전』 / 사이언스올, 2018 / 이광연, 「얼마나 멀리까지 볼 수 있을까?」, / 동아사이언스, 『수학동아』)